А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

1952 г. ТРУДЫ ИНСТИТУТА ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ Том IV

Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ

ИЗ ПРОШЛОГО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Конические сечения античных математиков

Нелегко понять ход мыслей человека XVII в., а еще более — человека античного мира. Историки часто обнаруживают склонность проектировать настоящее в прошлое, в особенности при попытках изложения мыслей ученых древности на современном языке. Так, многие находят у Архимеда основные идеи метода неделимых XVI и XVII вв., хотя вся история античных и средневековых идей хорошо выявляет длинный путь философской и математической мысли к актуальной бесконечности, к которой так отрицательно относился Аристотель вместе с другими античными мыслителями.

Совершенно таким же образом в «Конических сечениях» Аполлония (265—170) некоторые видят идеи аналитической геометрии; но здесь необходим тонкий анализ. Прежде всего следует хорошо понять, что одинаковые результаты могут получаться совершенно различными методами и на основании различных идей. Более того, нельзя видеть аналитическую геометрию и там, где античные операции над площадями, по выражении площадей алгебраическими формулами, обращаются в части формального аппарата, которым пользуется аналитическая геометрия ныне, совершенно так же, как в операциях метода неделимых, соответствующих операциям дифференцирования и интегрирования, нельзя усматривать чуждые этому методу идеи современного анализа.

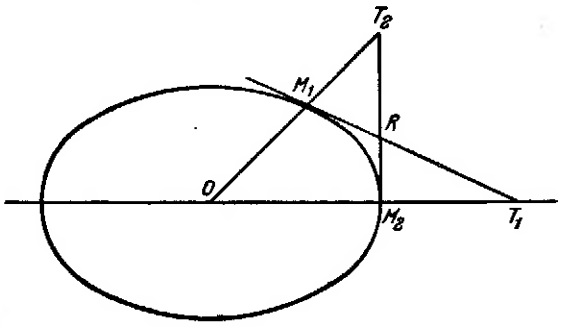
Следует различать историю кривых второго порядка, или, вернее сказать, конических сечений, и историю аналитической геометрии. Первая начинается с Менейхма, ученика Платона, вторая — только с Декарта и Ферма. Но при детальном изучении истории аналитической геометрии мы не можем обойтись без труда Аполлония.

Кроме пятой книги «Конических сечений», трактующей о наибольших и наименьших величинах, все остальные части труда Аполлония так или иначе входят в современные курсы аналитической геометрии; однако роль различных теорий и логические связи между ними уже не прежние. Так, знаменитые теоремы Аполлония о сопряженных диаметрах теперь не имеют того значения, какое имели у самого Аполлония, и утратили почетное место, отдававшееся им в старых учебниках.

Отметим далее одну интересную и игравшую важную роль, но уже в XVII в. забытую теорему из «Конических сечений». Она состоит в том (фиг. 1), что если обозначить через $M_1 T_1$, $M_2 T_2$ касательные в точках M_1

и M_2, а через T_1 и T_2 пересечения их с прямыми OM_1 и OM_2, проходящими через центр O, то треугольники M_1T_2R и M_2T_1R равновелики.

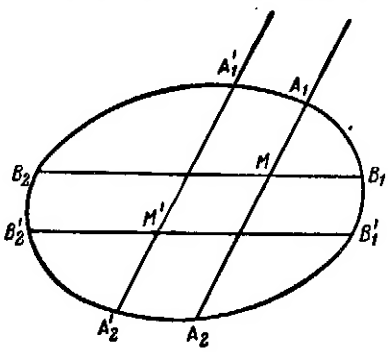
Вот другая теорема, которая играла, наоборот, большую роль в истории аналитической геометрии вплоть до Эйлера и обобщение которой явилось основной теоремой в теории алгебраических кривых, ведущей свое начало от Ньютона. Эта теорема состоит в том (фиг. 2), что отношение прямоугольников, построенных на отрезках хорд MA_1, MA_2 и MB_1 MB_2, равняется отношению прямоугольников на отрезках параллельных хорд $M'A_1'$, $M'A_2'$ и $M'B_1'$, $M'B_2'$:



Фиг. 1.

$$\frac{MA_1 \cdot MA_2}{MB_1 \cdot MB_2} = \frac{M'A_1' \cdot M'B_2'}{M'B_1' \cdot M'B_2'}. \qquad (1)$$

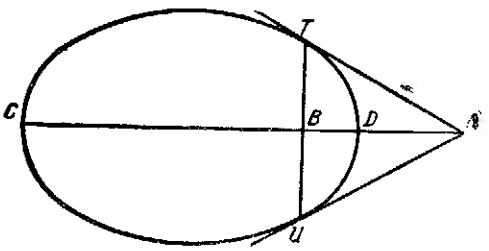
Наконец, укажем третью теорему, которая в настоящее время играет, пожалуй, еще бо́льшую роль, чем в XVII в. Сейчас она относится к теории поляр, причем в синтетической геометрии имеет не меньшее значение, чем в аналитической. Это теорема, утверждающая гармоничность точки A, из которой проведены касательные AT и AU, и точек C, B, D пересечения диаметра, проходящего через A, с кривой и хордой прикосновения (фиг. 3).



Фиг. 2.

Заметим, что об асимптотах Аполлоний говорит больше, чем современные учебники; но точка зрения его на асимптоты совсем другая, чуждая тех понятий бесконечности и предела, которыми оперируем мы.

Вне сомнения, самыми важными после диаметральных свойств конических сечений являются у нас фокальные свойства и построения касательных. Так как у Аполлония свойство радиусов векторов не является определением эллипса и гиперболы, а только производным свойством, то фокусы ему приходится определять геометрически реторическим правилом и по существу весьма формально. Фокус эллипса, по Аполлонию, это точка, делящая большую ось на две такие части, что прямоугольник, построенный на них, равен четверти прямоугольника, построенного на параметре, т. е. $2\frac{b^2}{a}$ и большой оси $2a$.



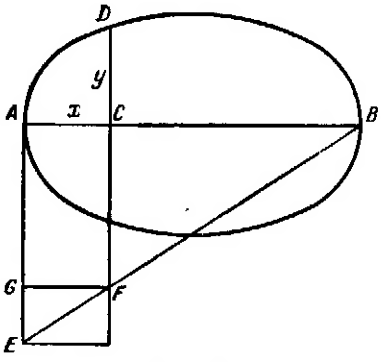
Фиг. 3.

Те основные свойства, «симптомы» параболы, эллипса и гиперболы, в которых мы теперь видим уравнения этих кривых, у Аполлония не играют той роли, что в настоящее время.

Если переложить эти «симптомы» на алгебраический язык, то основное свойство выразится уравнением

$$y^2 = 2px + qx^2, \tag{2}$$

где $q<0$ для эллипса, $q>0$ для гиперболы и $q = 0$ для параболы. Уравнения в форме (2) приводятся только для выяснения происхождения терминов эллипса, гиперболы, параболы (недостатка, избытка, равенства).



Фиг. 4.

При этом для параболы квадрат на ординате $y = CD$ равен прямоугольнику на абсциссе $x = AC$ и отрезке $2p$ параметра (параметр Аполлония равен удвоенному нашему). Для эллипса этот квадрат равен меньшему прямоугольнику, полученному таким построением. В конце A диаметра $2B = 2a$ восставливается перпендикуляр $AE = 2'p$, точки E и B соединяются прямой, пересекающей $CF \perp AB$ в точке F. Тогда квадрат на CD равен прямоугольнику $ABFG$, ибо $GF : x = p : a$, т. е. $GE \cdot EF = \frac{px^2}{a}$ и $y^2 = 2px - qx^2$, где $q = \frac{p}{a}$ (фиг. 4).

Аналогично проводится построение и для гиперболы.

Перевод формулировки античной в современную алгебраическую, казалось бы, наводит на мысль о том, что отрезки AC и CD суть здесь координаты, а $y^2 = 2px + qx^2$ уравнение кривой. Но в действительности у Аполлония нет идей аналитической геометрии [1].

2. Два основных принципа аналитической геометрии

Для дальнейшего необходимо прежде всего выявить две основные идеи аналитической геометрии и, выявив их, признать, что при их отсутствии нельзя относить геометрические исследования к аналитической геометрии, хотя бы эти исследования и доходили (чуждым аналитической геометрии методом) до очень ценных результатов, относящихся к коническим сечениям.

В основе аналитической геометрии лежат два принципа [2]. Первый из них — координатный принцип можно формулировать так: изучение взаимного расположения геометрических объектов сводится к изучению их расположения относительно некоторых определенных неизменных объектов. Этот принцип связан с понятием координаты как величины, характери-

[1] Лучшее издание «Конических сечений» — Гейберга (Apollonii Pergae Opera. Lpz., 1891–1893); И. Ягодинский дал русский перевод 1-й книги в «Изв. Сев.-Кав. гос. ун-та за 1928 г.». Об Аполлонии см. также: Г. Цейтен. История математики в древности и в средние века. Перев. П. С. Юшкевича. М., 1938, и H. Zeithen. Die Lehre von den Kegelschnitten in Alterthum. Kopenhagen, 1886.

[2] Д. Д. Мордухай-Болтовской. Аналитическая геометрия. Курс лекций. Варшава, 1913.

зующей положение объекта — прежде всего точки — относительно неизменных объектов (например, осей Ox и Oy).

Конечно, у самого Аполлония мы не находим понятия о координате. Он не мыслил AC и CD как абсциссу и ординату, определяющие положение точки на плоскости, а только как некоторые линии, связанные с точкой и кривой.

Я формулирую этот первый принцип в столь общей форме, так как считаю, что в истории аналитической геометрии весьма важна эволюция этого принципа, начиная с его частной формы — «декартовых координат» и кончая линейными плюкеровыми координатами прямой, параллельными координатами и, наконец, проективными координатами.

Второй принцип определяемости носителя уравнением состоит в том, что свойство, характеризующее элементы, принадлежащие носителю, выражается уравнением между признаками элементов.

И здесь я беру самую общую формулировку, под которую подводится не только уравнение между координатами, но, например, и уравнение между радиусом кривизны и углом смежности в натуральной геометрии, являющейся одной из дальнейших ступеней развития аналитической геометрии.

Если даже считать величины, которыми оперирует Аполлоний, за координаты, то можно ли сказать, что он оперирует уравнением? Я думаю, что нет. Ведь в таком случае он должен был бы мыслить себе бесконечное множество точек носителя — пунктуал и определять это бесконечное множество одним уравнением, связующим признаки его элементов. Но античная мысль не оперировала актуальной бесконечностью. Логически предложения: «свойство Ω имеет место для каждого из a_1, a_2, a_3...» и «свойство Ω имеет место для всех a», эквивалентны, но психологически переход от одного к другому требует совместного рассмотрения всей совокупности a как *множества*, причем в настоящем случае еще *бесконечного*.

В аналитической геометрии не следует видеть только одну алгебраизацию «конических сечений» Аполлония, в ней следует видеть еще выдвижение совершенно чуждых античной мысли идей, созданных философией XVII в.

3. Фузионизм античных математиков

Пожалуй, мы могли бы еще говорить о скрытом под геометрической формой определении кривой с помощью уравнения, если бы подход к параболе, эллипсу и гиперболе был у Аполлония планиметрическим. Но этого у него нет. Подход его чисто стереометрический. Изучаемые кривые у него являются сечениями прямого конуса, и то, что можно было бы счесть за координаты, возникает в ходе чисто стереометрического исследования.

В настоящее время получение параболы, эллипса и гиперболы как сечений конуса перешло в область начертательной геометрии. Хотя в некоторых учебниках аналитической геометрии эта глава воспроизводится, но в них она носит чисто геометрический характер, и в результате построений получается не уравнение, а основные свойства радиусов-векторов и директрис, определяющих эти кривые.

Но если идеи, лежащие в основе аналитической геометрии, следует признать чуждыми античным мыслителям, то этого нельзя сказать об основных целях аналитической геометрии. Тщательный анализ вскрывает, что эти цели были не очень далеки от тех, которые ставились античными математиками. Именно, основной целью геометрии Декарта и Ферма являлось графическое решение уравнений, к которому приводит алгебраизи-

рованное решение геометрических задач и при этом преимущественно задач на построение. Это как раз та цель, которая и являлась главной целью исследования конических сечений у античных математиков.

Действительно, каким образом и с какой целью были открыты парабола, эллипс и гипербола? Были ли они открыты как конические сечения? Или, может быть, им сперва было дано планиметрическое определение, а уж потом было доказано, что они получаются при сечениях конуса?

Я думаю, что приходится склониться к первому предположению. Известно, что еще математик IV в. до н. э. Менехм решал задачу об удвоении куба с помощью параболы и гиперболы или с помощью двух парабол, причем при изучении этих кривых брались конусы с прямым или тупым углом при вершине, а сечение производилось плоскостями, перпендикулярными к прямолинейно-образующей. Было бы неправильно утверждать, что конические сечения были изобретены только для решения задачи об удвоении куба, но вне сомнения, что их появление в геометрии было вызвано поисками решений задач на построение.

Следует иметь в виду, что в самой формулировке этих проблем оставалась неопределенность, не было точно зафиксировано требование выполнения построения с помощью эвклидова комплекса: циркуля и линейки.

Сечения пирамид, цилиндров и конусов, видимо, интересовали математиков еще ранее. Так, Демокрит исследовал плоские сечения, параллельные основанию кругового конуса [3].

Что античные математики допускали сдвиг в самом понимании классических проблем на построение, ясно видно уже из самого наименования этих, а также других кривых, получаемых стереометрически, телесными местами, в отличие от плоских мест, каковыми являются прямая и окружность. Парабола, эллипс и гипербола прежде всего являются телесными местами, прежде всего они получаются стереометрически. Здесь следует вспомнить весьма сложное стереометрическое решение делосской проблемы удвоения куба Архитом, в котором фигурирует кривая на цилиндре, образуемая пересечением с движущейся параллельно себе окружностью [4].

4. Графическое решение уравнений

Я уже отметил, что основной целью ранней аналитической геометрии было графическое решение уравнений, о чем в прежнее время руководства по аналитической геометрии говорили очень много. Можно сказать, что аналитическая геометрия являлась приложением алгебры к геометрии и в начальной стадии своего развития представляла даже скорее приложение геометрии к алгебре, причем эта черта ее не была утрачена даже в XIX столетии.

Обычно на это обстоятельство не обращают внимания. Обращаясь же к сочинениям Декарта (1637) и Ферма (ок. 1637), мы ясно видим, что преимущественно интересовало их именно приложение геометрии к алгебре [5]. Ведь мы не находим в этих работах даже самых простых теорем чисто геометрического типа, доказываемых методом аналитической геометрии.

---

[3] С. Я. Лурье. Теория бесконечно малых у древних атомистов. М.—Л., 1935.

[4] См. Г. Цейтен. Цит. соч., стр. 66—67.

[5] См. Р. Декарт. Геометрия. Перев. А. П. Юшкевича М., 1938, и там же: П. Ферма. Введение в изучение плоских и телесных мест и «Приложение к Введению в места, содержащие решение телесных задач с помощью мест».

Первое время построение корней является основной задачей, но со временем эта задача сдвигается с первого плана, и если Декарт с нее начинает, то Лопиталь ею кончает [6].

Но к графическому решению уравнений открываются два пути: 1) изыскание уравнений, определяющих известные кривые, или, во всяком случае, кривые, которые вычерчиваются простым непрерывным движением; 2) определение геометрического значения простейших алгебраических уравнений.

По первому пути шел Декарт, по второму Ферма (независимо от Декарта).

В «Геометрии» Декарта видное место занимало решение так называемой задачи Паппа. В этой задаче даны по положению несколько прямых и требуется найти геометрическое место таких точек, что если из этих точек провести под данными углами к данным прямым отрезки, то отношение произведения некоторых из проведенных отрезков к произведению остальных будет постоянно. Эта задача у Декарта получает особенное значение только потому, что кривые, дающие ее решение, включают конические сечения, являясь естественным их обобщением. Декарт находит среди них и другие известные кривые, вычерчиваемые непрерывным движением.

Определив уравнение кривой, данное каким-либо условием (т. е. заданное как геометрическое место), Декарт не находит другого выхода, как обратиться к Аполлонию, и выражает содержание его основных положений в форме уравнения между x и y, причем обнаруживает совпадение последнего с тем, которое он получает, решая задачу при определенном выборе направления и длины осей и величины параметра.

Ферма же приводит уравнение к такому виду, из которого непосредственно на основании теорем элементарной геометрии видно его геометрическое значение, или к такому виду, что в нем узнается одна из теорем Аполлония. При этом у Ферма приведение уравнения совершается или путем изменения формы посредством приведения к пропорции, или, что имеет особенное значение в аналитической геометрии, заменой x другой аналогичной величиной, относящейся не к Oy, а к $Oy' \parallel Oy$, в чем, конечно, заключается эмбрион преобразования координат. Мы находим у Ферма геометрическое значение уравнений:

В форме Ферма:	В современной:	
$DA = BE$	$ax = by$	(прямая через начало)
$Z - DA = BE$	$ax - by = c$	(вообще прямая)
$AE = Z$	$xy = c$	(гипербола, отнесенная к асимптотам)
$E^2 = DA$	$x^2 = ay$	(парабола)
$A^2 = DE$	$y^2 = ax$	
$B^2 + A^2 = E^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	(окружность)
$B^2 \pm A^2K^2 = E^2$	$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$	(эллипс и гипербола)

Я обращаю внимание на метод Ферма приведения уравнения к системе уравнений, определяющих уже не одну, а две величины, и вытекающий отсюда способ построения корней. При этом я в основном сохраняю обозначения самого Ферма.

Рассматривается уравнение 3-й степени:

$$A^3 + BA^2 = Z^2B, \tag{3}$$

[6] G. F. de l'Hospital. Traité analytique des sections coniques. Paris, 1707.

где гласная A стоит вместо нашего x, а свободный член Z^2B берется в этой форме для однородности всех членов, как этого требовал Виэт [7].

Затем Ферма полагает

$$A^3 + BA^2 = BAE$$

или

$$A^2 + BA = BE \tag{4}$$

и вместе с тем по (3)

$$Z^2B = BAE$$

или

$$Z^2 = AE \tag{5}$$

и корень уравнения (3) оказывается абсциссой точки пересечения параболы (4) и гиперболы (5).

Сущность этого метода состоит в том, что уравнение

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

приводится к

$$\varphi(x) = 0(x,y)$$

$$\psi(x) = 0(x,y),$$

где $0(x, y)$ выбирается так, что по сокращении происходит упрощение.

Весьма вероятно, что корень этой методы следует искать в Regula aliza Кардана [8].

Это кардановское правило состоит в приведении уравнения к системе двух уравнений, при этом таких, решение которых достигается без приведения к первоначальному путем исключения одного неизвестного. Например, уравнение

$$x^6 + ax^4 + a^2x^2 + a^3 = bx^3 \tag{6}$$

приводится к системе уравнений

$$xy = a \tag{7}$$

$$x^3 + y^3 \cdot | \; x^2y + xy^2 = b, \tag{8}$$

а затем мы имеем:

$$2a(x + y) = 2x^2y + 2xy^2 = (x + y)^3 - x^3 - y^3 - x^2y - xy^2 = (x + y)^3 + b.$$

Уравнение же

$$(x + y)^3 = 2a(x + y) + b \tag{9}$$

разрешается с помощью формул Кардана относительно $x + y$, и окончательной системой является:

$$x + y = c; \; xy = a, \tag{10}$$

т. е. x, y определяются квадратным уравнением.

После Декарта и Ферма графическим решением уравнений высших степеней занимались ученые Слюз, Крег, Ньютон и другие математики XVII и XVIII вв.

---

[7] Д. Д. Мордухай-Болтовской. Первые шаги буквенной алгебры. - «Изв. Сев.-Кавк. гос. ун-та за 1928 г.»

[8] M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. II, 1899, стр. 436. Cardanus Opera, t. 4, p. 371, 434.

5. Алгебраическая и аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия в том виде, как мы ее находим у Декарта и Ферма, использует, как увидим ниже, только второй основной принцип и имеет целью не аналитическое доказательство геометрических теорем, а графическое решение уравнений. Поэтому геометрию Декарта, пожалуй, лучше называть не аналитической, а алгебраической, а может быть, еще лучше — геометрической алгеброй.

К тому же смысл терминов «анализ» и «синтез» сильно колеблется.

В методике вслед за Паппом анализ понимается обычно как прием нахождения доказательства (или решения) путем восхождения от следствий к причинам; синтез же, наоборот, идет от причин к следствиям[9]. Соответственно этим приемам мышления отличаются и два приема изложения. В этом смысле об аналитическом изложении, противоположном чисто синтетическому методу изложения в «Началах» Евклида, можно говорить лишь применительно к аналитической геометрии в ее развитой форме.

В другом же понимании анализ толкуется как изучение целого путем дробления его на части, а синтез как воссоединение частей. В этом смысле говорят об анализе бесконечно малых или о химических анализе и синтезе. Хотя эти понимания и различны, но, вне сомнения, между ними существует логическая связь: то, что мы находим в целом, мы можем мыслить обусловленным свойством частей.

Но толкование названных терминов в первом смысле перешло в XVII в. в понимание анализа просто как алгебраической методы; уравнение при этом рассматривается как основание свойств геометрического объекта, например, кривой, и восхождение к уравнению тогда является восхождением от следствий к причинам.

Мы не можем, однако, настаивать на том, что геометрию Декарта следует назвать алгебраической, потому что при своем зарождении алгебраическая геометрия понималась значительно шире; к ней относились всевозможные алгебраические решения задач (главным образом на построение), в которых ни первый, ни второй из упомянутых принципов не используются. Алгебраическая геометрия в широком смысле или алгебраические методы решений задач сделались возможными после изобретения Виэтом буквенной алгебры. При этом выявились два момента:

1) приведение геометрической задачи к уравнению, определяющему неизвестное, от которого зависит решение задачи; коэффициенты этого уравнения выражаются через данные величины. Это приложение алгебры к геометрии;

2) построение корня уравнения, которое, естественно, требовало изучения построения элементарных выражений. Это приложение геометрии к алгебре.

До аналитической геометрии Декарта уже существовала алгебраическая геометрия, и аналитическая геометрия явилась системой специальных методов решения задач алгебраической геометрии.

Следует особое внимание обратить на работы Гетальди[10], приводящего решение задачи на построение к уравнениям 2-й и высших степеней и заключающего в случае мнимых корней о невозможности решения

---

[9] Д. Д. Мордухай-Болтовской. Психология математического мышления.— «Вопросы философии и психологии», 1908, № 7.

[10] M. Gethaldi. De resolutione et compositione Mathematica, 1630; Его же. Variorum problematum collectio. 1607. См. M. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 809—811.

поставленной задачи, а в случае неопределенного уравнения — о бесчисленном множестве решений.

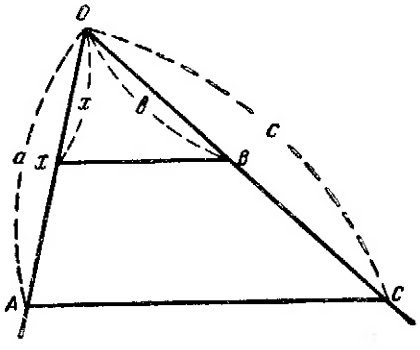
Тщетные попытки решения уравнений выше 4-й степени послужили причиной сдвига в самом понимании решения уравнения, которое стало пониматься не в смысле конструирования (т. е. построения в радикалах), а в смысле вычисления по приближению или же в графическом. В последнем случае корни стали определяться отрезками, определяемыми точками пересечения кривых, которые вычерчиваются не только с помощью циркуля и линейки, например: параболы, эллипса, гиперболы, конхоиды и других.

Интересно отметить, что математики XVII в. занимаются построением сложных алгебраических выражений без сведения их к простым. Конечно, во многих случаях построения получаются более простые, чем те, которые даются общей методой. Следует еще отметить, что алгебраический характер исследования конических сечений выдерживается в XVII и XVIII вв. различными учеными в различной мере и многие пользуются только алгебраическими обозначениями, но не алгебраическими операциями.

Даже в середине XVII в. античные методы перемешиваются с картезианскими: уравнения конических сечений выводятся из стереометрических соображений, вместо уравнений используются неудобные для дальнейших операций пропорции, применяется устарелая символика и т. д.

6. Арифметизация в аналитической геометрии

Заслугой Декарта иногда считают арифметизацию геометрии, приведение геометрических операций к действиям над числами. Но это неверно. Это было бы возможно только в том случае, если бы Декарт представлял себе взаимно-однозначное соответствие между числами и геометрическими величинами, т. е. если бы он имел в своем распоряжении иррациональные



Фиг. 5.

числа, хотя бы не строго обоснованные, но принятые на веру. Но в его время этого не было, да и не могло быть.

Однако можно сказать, что Декарт в своей не арифметизированной, а алгебраизированной геометрии делает первый шаг к арифметизированной геометрии. Здесь он уходит дальше Ферма. Для Ферма «характеристики» $a, b, c, d\ldots$ представляют собой, как для Виэта и многих других алгебраистов, величины в общем смысле (magnitudines), т. е. либо непрерывные геометрические величины, либо дискретные числа. Конечно, геометрические операции, дающие члены выше третьего измерения, могли иметь при этом только формальный характер; над буквенными выражениями вроде a^3b и т. п. допускались обычные операции, т. е. по существу

все эти гипергеометрические операции и элементы играли ту же роль, какую в настоящее время играют комплексные числа. Декарт же все буквы мыслит не как числа, как делают все математики, начиная с Лежандра, а как отрезки, и операции $a+b$, ab, $\frac{ab}{c}$ мыслит как операции над отрезками. Например, построение величины $x=\frac{ab}{c}$ видно из фиг. 5.

Одним словом, Декарт поступает так, как Д. Гильберт, в своих «Основаниях геометрии» строящий исчисление отрезков с целью обоснования теории подобия и теории пропорций без аксиомы Архимеда.

7. Функциональное мышление и Декарт

Таким образом, Декарту нельзя ставить в заслугу арифметизацию геометрии, но можно сказать, что в своем исчислении отрезков он встал на промежуточную точку зрения. Аналогично обстоит дело с вопросом об идее функции у Декарта.

Мы тесно связываем аналитическую геометрию с понятием функции. Мы меняем x и в зависимости от x у нас меняется и y. Но мыслил ли таким образом Декарт? Я думаю, что так он не мог мыслить. Раньше чем начали мыслить y меняющимся в зависимости от x вне времени, что сводится скорее не к действительному изменению, а только к возможности изменения, x и y мыслились как изменяющиеся во времени, т. е. как флюэнты, согласно терминологии Ньютона. Это время у Ньютона же сначала обращается в умозрительное время, а затем превращается в независимое переменное в общем смысле.

Само слово «функция» употребил впервые Лейбниц (1694) в смысле некоторого отрезка, связанного с точкой кривой, как абсцисса, ордината, радиус кривизны и т. д.

Это геометрически конструктивное понятие о функции вскоре эволюционировало в аналитически конструктивное понятие Ив. Бернулли и особенно Эйлера, при котором функция отождествляется с выражением при помощи аналитической формулы. В дальнейшем динамическое и конструктивное понятия функции сливаются. При этом функциональное мышление со всею определенностью выступает только у Эйлера.

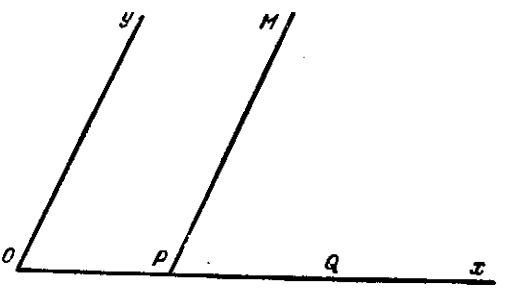
Но и здесь Декарт занимает некоторое промежуточное положение и делает важный шаг вперед в развитии к функциональному мышлению. Во-первых, он определяет кривые форономически, заставляя двигаться точку по кривой или саму кривую по определенному закону. Это еще не функциональное мышление, но это первый шаг к динамическому понятию функции Ньютона — флюэнты. Переход от фоpономической точки зрения, рассматривающей изменение величины вне времени, к кинематической, связывающей это изменение со временем, и подводит к понятию флюэнт.

Во-вторых, Декарт мыслит актуально бесконечное множество всех точек, которые, как некое целое, несет кривая; он обнимает мыслью все положения, которые занимает движущаяся точка, и в каждом положении мыслит одну и ту же зависимость между x и y. Однако до понятия функции в смысле табличного соответствия между множествами, которое выступает уже в геометрически конструктивном понятии функции Лейбница, Декарт не доходит; он мыслит бесконечное множество пар (x, y), но не пару двух множеств x и y в отдельности.

Анализ сочинений последователей Декарта укрепляет меня в высказанном мнении. Я повторяю, что ордината y сперва вовсе не мыслится как изменяющаяся вместе с x, но рассматривается основное простейшее движение, когда угол MPQ движется так, что PQ скользит по Ox, а точка M

движется определенным образом по PM. Де Витт называет OP интервалом (фиг. 6), PM образующей линией [11]. Величина отрезка PM определяется тем, что при всяком положении M задается некоторое его свойство, которое характеризуется чисто геометрически. Из этого свойства и выводится в алгебраической форме некоторая зависимость между PM и OP. Аналогичная терминология сохраняется Виттом и для других прямых, участвующих в образовании кривой.

При этом то, что мы называем началом координат O, всегда является характерной точкой кривой. Директриса (по-нашему ось Oy) есть прямая,



Фиг. 6.

проходящая через O и тоже характерная для образуемой при движении кривой.

Следует отметить, что форономическая форма выражения не изгоняется из аналитической геометрии даже много позднее. Такую форономическую форму выражения можно найти, например, у Девелея [12].

Именно потому, что подход Декарта был форономический, а не функциональный, задержалось и развитие пространственной аналитической геометрии. Координаты точки на кривой мыслились как изменяющиеся в зависимости от некоего параметра. Но подобное образование поверхности было невозможно, так как она не описывается точкой. Уравнение поверхности могло появиться только с выявлением конструктивно-динамической функции от двух переменных, что следует отнести только к Клеро [13].

8. Координатный принцип

Мы уже отметили, что ни Декарт, ни Ферма не имели понятия о координатах в нашем смысле и таким образом использовали не оба основных принципа, мной указанные, а только второй: определяемость кривой уравнением.

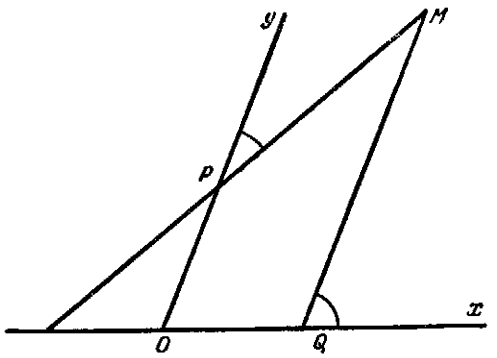
Величины, которыми характеризуют положение некоторых объектов A, B, C, D... относительно некоторых неизменных объектов, называются координатами.

В настоящее время координаты считают наиболее существенным элементом аналитической геометрии. Тодгентер даже заменил обычный термин: аналитическая геометрия другим — координатная геометрия [14]. Но так обстоит дело только в настоящее время, а в прошлом было по-иному.

[11] J. de. Witt. Elementa curvarum linearum. 1659.
[12] Develey. Géometrie analytique. Paris, 1824.
[13] A. Clairaut. Recherches sur les courbes à double courbure. Paris, 1731.
[14] J. Todhunter. A treatise on plane coordinate Geometry. 1862 (имеется русский перевод).

Координатный принцип устанавливает соответствие между точками плоскости и парами чисел. Затем геометры идут гораздо дальше, устанавливая соответствие между прямыми плоскости и координатами ее, а затем между точками (или прямыми) одной плоскости и точками (или прямыми) другой. Начинают мыслить две плоскости как состояние одной, изменяющейся плоскости, как преобразование плоскости при некоторых инвариантах. Но все это относится к недавнему прошлому. В более отдаленном — абстрактной идеи соответствия совсем не было.

Понятие о координате в нашем смысле появилось очень поздно. У всех авторов до Эйлера величины (x, y) в уравнении, определяющем кривую,



Фиг. 7.

вовсе не суть величины, определяющие положение точки на плоскости относительно некоторых осей Ox и Oy. Это только характерные линии на самой кривой. Решая упомянутую выше задачу Паппа, Декарт начинает с установления зависимости между некоторыми отрезками $x=AB$ и $y=BC$. Мы назовем эту зависимость уравнением геометрического места, считая x и y за координаты точки кривой. Но для Декарта x и y не являются координатами в нашем смысле. Он нигде не говорит об определении положения точки на плоскости ни этими, ни какими-либо другими величинами. Более того, эти x, y не подводятся под то понятие, которое мы обозначаем термином «декартовы координаты». Отрезки MP и MQ здесь проводятся не параллельно Ox и Oy под одним и тем же углом (фиг. 7), и лишь в частных случаях x, y оказываются нашими прямоугольными декартовыми координатами.

Даже у Эйлера нет полного совпадения с нашим подходом к понятию координаты. Но в отличие от своих предшественников Эйлер даст общие формулы преобразования координат, причем с целью преобразования кривой, а не всей плоскости. Несомненно, что именно эти формулы должны были сыграть роль при выявлении понятия координаты в современном смысле.

Величины (x, y) обращаются в координаты на плоскости, с одной стороны, под влиянием начертательной геометрии, созданной Монжем, с другой стороны, под влиянием картографии, которой занимался Эйлер.

Эмбрион идеи координаты приходится искать еще задолго до Монжа. Уже Дюрер [15] пользуется координатами точек на картинной плоскости, протягивая нить от глаза к изображаемой им точке предмета; он опреде-

[15] A. Dürer. Underweysung der Messung, 1525.

ляет координаты точки пересечения ее с картинной плоскостью, которой является плоскость рамы, где натягиваются две нити, параллельные ее краям, и, передвигая их, определяет расстояние от краев рамы. Но едва ли можно уловить в работе Декарта влияние этих дюреровских идей. У Декарта играют роль те основные величины Аполлония, соотношение между которыми дает характерное свойство кривой.

Другой источник понятия о координате лежит в картографии, причем именно здесь можно довольно далеко проследить понятие координаты. Как это часто случается в истории науки, сперва выступает более сложный случай, а затем делается переход к более простому. Птоломей, определяя положение точки на сфере некоторыми координатами, дает вместе с тем первое понятие о преобразовании, правда, не плоскости в плоскость, а сферы в плоскость, что приводит затем к понятию о координатах на плоскости. Но в античное время и во время Декарта эти идеи не получили развития, ибо не имелось налицо общей идеи соответствия и преобразования.

На первый взгляд кажется, что рассмотрение (x, y) как координат на плоскости мало вносит в геометрию Декарта. Но если вдуматься, то обнаружится, что только при наличии этого понятия становится возможным метод преобразования координат как общий метод.

Можно, пожалуй, (x, y) у Декарта, Ферма и Лопиталя назвать координатами на кривой как величины, определяющие положение точки не на плоскости, а на определенной кривой. Преобразование же координат мы теперь совершаем при помощи формул, связующих (x, y) с (x', y') для любой точки плоскости.

Аналитическая геометрия Био [16] начинается с определения абсцисс и ординат почти в современном смысле. Но даже здесь следует прибавить «почти», так как в определении говорится не об абсциссе и ординате, определяющих точку, но об абсциссах и ординатах точек кривой. Отметим, что и у Клюгеля [17] координаты определяются только в отношении к графику.

9. Определение кривой уравнением и функции графиком

Функция изучается с помощью графика; можно сказать и наоборот: график в аналитической геометрии изучается с помощью функции. Конечно, первый подход к графику имеет только практически-методическое значение при воспитании функционального мышления. Но он же встречается в не вполне математизированной форме в теории широт и долгот схоластика XIV в. Орезма.

Схоластический спор о том, что́ меняется при изменении субстанции — форма или материя, привел еще Дунса Скотта к такому решению: ни материя, ни форма не меняются. Но форма проходит через формы форм или формальности. Форма — это метафизический предок переменного x, формальности — его значений a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$.

Орезм строит то, что мы могли бы назвать графиком, откладывая время по оси Ox, а по перпендикулярам значения формальностей и связывая таким образом с кривой различные типы изменения во времени. Можно сказать, что и у Орезма имеются координаты точки на кривой: x является у него долготой, а перпендикуляр y — широтой.

---

[16] J. B. Biot. Géometrie analytique. Paris, 1802.
[17] G. S. Klügel. Mathematisches Wörterbuch. Leipzig, 1803—1808.

Оказал ли Орезм влияние на Декарта? Такого влияния, казалось бы, можно было бы искать у Декарта, который прошел через схоластическую науку. Но в геометрии Декарта мы нигде не можем уловить такого влияния.

Метафизическое понятие о функции задерживается в своем развитии и не вступает в область математических исследований. Учение о долготах и широтах Орезма ничего не дает, кроме довольно примитивной классификации типов изменения, отвечающих различным типам графиков. Мы не находим у Орезма чего-либо такого, что могло бы натолкнуть на обратный подход — на изучение не функции по графику, но графика по функции.

Следует также отметить, что у Орезма только x является линией, а y есть собственно не линия, а некоторый тонкий прямоугольник, стоящий на Ox, т. е. на отрезке, соответствующем мгновенному изменению времени.

У Орезма, как и у Фомы Аквинского, нет еще непрерывного изменения; изменение идет скачками в ничтожные промежутки времени (мгновения) [18].

Я думаю, что учение Орезма вряд ли оказало влияние не только на Декарта, но и на Ньютона в его учении о флюэнтах и флюксиях.

10. Аналитическая геометрия без преобразования координат

Аналитическая геометрия в современной законченной форме с общим исследованием кривых второго порядка могла развиться только вместе с теорией преобразования координат. Чтобы уяснить себе, какое значение имело в истории аналитической геометрии преобразование координат, я предлагаю обратиться к тем приемам, которые применялись до введения в аналитическую геометрию общих формул преобразования координат.

Каким образом решался вопрос, представляется ли какая-либо кривая уравнением

$$\sum \varphi_{ik}(a,\ b\ ,c\ \ldots)\, x^i y^k = 0? \tag{11}$$

Для решения этой задачи выводится сперва общее уравнение этой кривой при каких угодно осях координат:

$$\sum \varphi_{ik}(\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots)\, x^i y^k = 0 \tag{12}$$

и затем определяется, возможно или невозможно определить a, b, c... через α, β, γ... так, чтобы коэффициенты (17) и (18) оказывались пропорциональными.

Так, например, можно установить, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно, есть окружность, сравнив получаемое на основании этого свойства общее уравнение с уравнением окружности

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2. \tag{13}$$

Так поступаем и мы, когда выводим условия, при которых кривая второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{14}$$

представляет окружность (13).

[18] H. Wieleitner. Nicolaus Oresmus graphische Darstellung.—«Natur und Kultur», H. 14, 1912; Его же. Der Tractatus de latitudinibus formarum.— «Bibl. mathem.» (3). 1913.

Весьма интересно сравнительно позднее появление уравнения кривой второго порядка в общей форме (14). Бесспорно, что одной из причин этого является ясно выраженная тенденция держаться однородности строения уравнения. В картезианском смысле выражения Ax^2, Dx и т. д. понимаются как отрезки, но только при введении масштабной единицы, т. е. при представлении Dx как $\frac{Dx}{1}$ и т. п. Но как Декарт, так и его последователи не пользуются масштабной единицей; на ее месте всегда фигурирует некоторый произвольно взятый отрезок, и уравнение (14) должно писаться в форме:

$$\frac{ax^2}{m^2} + \frac{2bxy}{m^2} + \frac{cy^2}{m^2} + \frac{2dx}{m} + \frac{2ey}{m} + f = 0. \tag{15}$$

Впрочем, в действительности в этой форме общее уравнение кривой второго порядка не пишется, так как в качестве параметров всегда стараются выбирать некоторые определенным образом построенные отрезки.

Еще интереснее отметить, что методы более ранних математиков, в том числе и самого Ферма, колеблются около приема преобразования координат, но эти ученые не могут овладеть названным приемом из-за того, что понятие координаты на плоскости не выяснено.

Без этого приема математическая мысль сперва преобразует уравнение

$$f(x, y) = 0 \tag{16}$$

в более простое

$$\varphi(x', y') = 0 \tag{17}$$

при помощи формул

$$\left.\begin{aligned} \omega(x, y) &= y' \\ x &= x', \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

истолковывая геометрически эту зависимость так, что и x', y' оказываются координатами.

Общей методы еще нет. Не сознается даже то, что формулы преобразования должны иметь линейную форму:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= a'x + b'y + c' \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Так, например, обстоит дело в сочинениях де ля-Гира [19].

11. Прямая в аналитической геометрии

Аналитическая геометрия даже во второй половине XVIII в. обходится без тригонометрии. Последняя в своей гониометрической части развивается медленно. Символика и алгебра тригонометрических величин создаются только Майером и Эйлером.

Основные формулы в теории прямой

$$\left.\begin{aligned} y &= ax + b, \\ a &= \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

[19] Ph. de la Hire. Nouveaux éléments des sections coniques. Paris, 1679.

где α угол, образуемый прямой с Ox, появляются только вместе с гониометрической символикой.

Вывода уравнения прямой у Декарта нет; у Ферма уравнение прямой имеется. Это странное явление объясняется различием их подходов. Декарт, идя от кривой к уравнению, извлекает (x, y) из внутренних элементов кривой, принимая, например, за y полухорду, за x ее высоту. Ферма же, идя от уравнения к кривой, должен брать за (x, y) внешние элементы. Можно сказать, что хотя (x, y) у него и не являются координатами на плоскости, но их можно признать координатами точки на прямой.

12. Преобразование координат без тригонометрии

Крамер [20] дает общие формулы преобразования координат. Но, во-первых, эти формулы не тригонометрические, во-вторых, они представляют собой формулы преобразования не координат точек на плоскости, а координат точек кривой.

Общие формулы Крамера пишутся так:

$$\begin{aligned} x &= m + pz + ru, \\ y &= n + qz + su, \end{aligned} \tag{21}$$

где коэффициенты p, q, r, s выражаются не тригонометрически, но через заданные отношения сторон различных треугольников, возникающих при преобразовании координат.

Тригонометрические формулы преобразования мы встречаем у Эйлера. Отличие его изложения от современного состоит только в том, что он не пользуется общепринятыми ныне леммами о проекциях. Оперирование с относительными геометрическими величинами, или, как некоторые говорят, с алгебраическими отрезками, тогда еще не производилось. Такого рода приемы могли войти в геометрию только после знаменитого спора об отрицательных геометрических величинах в начале XIX в., определенным образом выявившего право гражданства их в геометрии [21].

13. Начало истории кривых второго порядка

Современный учебник аналитической геометрии трактует только о прямой и кривых второго порядка. Уравнением параболы, эллипса и гиперболы мы обязаны Декарту и Ферма, которые, как мы видели, подошли к ним с различных сторон. Но следует помнить, что для них эти кривые прежде всего являлись коническими сечениями. Оба они пользуются свойствами их, выведенными стереометрически, согласно Аполлонию. Можно сказать, что у них еще нет чисто плоскостной аналитической геометрии.

Аналитическая геометрия на плоскости рождается с того момента, когда эти кривые получают чисто планиметрическое определение. Это знаменует начало новой второй эпохи. Эллипс становится геометрическим местом точек, сумма расстояний которых от двух точек постоянна, гипербола — геометрическим местом точек, разность расстояний которых от двух точек постоянна, парабола — геометрическим местом точек с равными расстояниями от точки (фокуса) и прямой (директрисы).

---

[20] G. Cramer. Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève, 1750.

[21] L. Brunschwieg. Les étapes de la philosophiae mathématique. Paris, 1912.

Стереометрическая сторона дела при этом не исчезает, но отходит на второй план. Наряду с частью, развивающей три планиметрические теории, излагается, но уже во вторую очередь, теория параболы, эллипса и гиперболы как конических сечений. Этот момент относится к де-ля-Гиру.

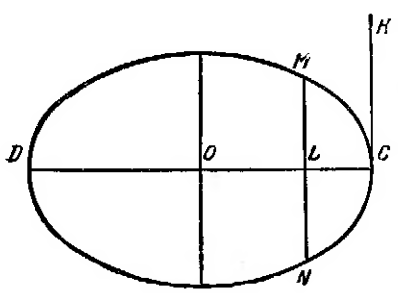
У Лопиталя аналитическая геометрия планиметризована, но еще не алгебраизована в той мере, как у нас. Начинается она с изучения параболы, эллипса и гиперболы. Определение их дается обычное, но только в геометрической форме. Определением служит, как у Декарта, построение непрерывным движением. «Прикрепляем, — говорит Лопиталь, — на плоскости концы нити FMf в данных точках F и f, расстояние между которыми меньше длины нити, берем грифель, чтобы держать эту нить натянутой, и двигаем его вокруг этих двух точек так, что он возвращается в прежнее положение. Он описывает тогда в этом движении кривую, которую назовем эллипсом». Парабола, эллипс и гипербола получают у Лопиталя название «конических сечений», раньше чем доказывается, что они возникают как плоскостные сечения конуса.

Наконец, третья эпоха характеризуется тем, что конические сечения подводятся под их объемлющее понятие кривых второго порядка и согласно этому строится и их стереометрическая аналогия — поверхности второго порядка.

В настоящее время обычно подходят к параболе, эллипсу и гиперболе, отправляясь от общего рассмотрения кривых второго порядка. Эллипс является кривой второго порядка без бесконечно удаленных точек, гипербола — с двумя бесконечно удаленными точками, парабола — с одной.

14. «Введение в анализ бесконечно малых» Эйлера

Эйлер[22] оперирует общим уравнением кривой второго порядка. Но он дает значительно меньше, чем наши учебники, и не использует преобразования координат для исследования кривых второго порядка. Вывод упрощенных уравнений кривых второго порядка совершается на основании некоторых общих свойств кривых второго порядка.



Фиг. 8.

Главная заслуга Эйлера состоит в том, что он первый дает общую теорию кривых второго порядка, основываясь на уравнении

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \xi y^2 = 0. \quad (22)$$

Правда, эту общую теорию Эйлер развивает не далеко. В пятой главе дается, по терминологии Эйлера, вывод главных свойств кривых второго порядка.

Первое свойство состоит в том, что прямая, проходящая через точку касания и делящая пополам какую-либо хорду, параллельную касательной, делит пополам и все другие хорды, параллельные касательной. Это свойство выводится Эйлером из рассмотрения коэффициентов уравнения кривой (22).

Второе главное свойство, получаемое через рассмотрение свободного члена уравнения, состоит в том, что (фиг. 8) для хорд MN, параллельных касательной CK в конце C диаметра DC, отношение $\frac{CL \cdot LD}{ML \cdot LN}$ имеет постоянное значение.

[22] L. Euler. Introductio in analysin infinitorum, vol. II. Lausannae, 1748.

Это свойство, как мы видели ранее, было известно и Аполлонию и Архимеду и играло важную роль в их рассуждениях. Таким образом, даже Эйлер оказывается связанным с «Коническими сечениями» Аполлония.

Из этих свойств и выводится упрощенное уравнение кривой второго порядка. Полагая

$$\frac{CL \cdot LD}{ML \cdot LN} = \frac{k}{h},$$

$$CD=a \text{ (диаметру)}, \quad CL=x, \quad ML=NL=y,$$

Эйлер получает уравнение

$$y^2 = \frac{h}{k}(ax - x^2), \tag{23}$$

т. е. вида

$$y^2 = 2px + qx^2. \tag{23'}$$

В эйлеровском «Введении» нет еще исследования кривой второго порядка, заданной общим уравнением, в современном смысле. Это исследование у нас разделяется на два момента: 1) приведение уравнения преобразованием к центру и к осям, 2) исследование формы кривой по уравнению.

Что делает Эйлер? Он берет в 6-й главе упрощенное уравнение:

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \tag{24}$$

и заключает, что при $\gamma > 0$ имеются *четыре* ветви, уходящие на бесконечность, которые мы, признавая на прямой только одну бесконечно удаленную точку, признаем за две ветви.

Заключение это выводится из того, что при $x = \pm\infty$ мы получаем для y вещественное значение ∞.

При $\gamma < 0$ и $x = \pm\infty$, y становится мнимым, т. е. бесконечные ветви отсутствуют. При $\gamma = 0$ мы имеем две (по-нашему одну) ветви, идущие на бесконечность. Совершенно так же, как это делается теперь, Эйлер дает трем типам полученных таким образом кривых названия гиперболы, эллипса и параболы.

15. Кестнер; Брио и Букэ

Известный методист-математик Кестнер [23] разрешает общее уравнение кривой второго порядка:

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \xi y^2 = 0, \tag{25}$$

что дает:

$$y = \frac{-(\varepsilon x + \gamma) \pm \sqrt{(\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\xi(\delta x^2 + \beta x + \alpha)}}{2\xi}. \tag{26}$$

Из формулы (26) Кестнер делает заключения относительно асимптот или числа ветвей, причем облекает свои выводы в форму, в которой фигурирует еще не отмененный принцип исчезновения конечного в сравнении

[23] A. G. Kästner. Anfangsgründe der Analysis endlicher Grösse. Göttingen, 1760.

с бесконечно большим, а также бесконечного низшего порядка в сравнении с бесконечным высшего порядка.

Величина под радикалом, говорит Кестнер, выражается так:

$$z = (\varepsilon^2 - 4\xi\delta)x^2 + \varphi x + \rho,$$

где φ, ρ определяются с помощью коэффициентов уравнения (26). Но, согласно учению о бесконечности, продолжает Кестнер, я принимаю, что когда x бесконечно, то

$$z = (\varepsilon^2 - 4\xi\delta)\, x^2,$$

ибо остальные члены в сравнении с этим исчезают. Если $\varepsilon^2 - 4\xi\delta > 0$, то кривая линия имеет возможные ординаты для положительных и отрицательных бесконечных x. Поэтому кривая не будет эллипсом. Далее, как и у Эйлера, делается заключение о существовании четырех ветвей и о том, что в рассматриваемом случае имеется гипербола.

Если $\varepsilon^2 - 4\xi\delta < 0$, то ординаты при бесконечных положительных и отрицательных абсциссах невозможны и имеется эллипс. При $\varepsilon^2 - 4\xi\delta = 0$ Кестнер берет $z = \varphi x + \rho$, заставляет исчезать ρ в сравнении с φx и получает параболу.

У Брио и Букэ[24], учебник которых сыграл особенно важную роль в истории методики аналитической геометрии, парабола, эллипс и гипербола определяются еще в начале курса их фокальными свойствами (среди примеров определения геометрических мест уравнениями). Сейчас же за этими кривыми рассматриваются: циссоида Диоклеса, строфоида, улитка Паскаля и другие кривые.

Подробное изучение параболы, гиперболы и эллипса следует уже после изучения кривых второго порядка вообще.

В первую очередь дается построение линии второго порядка, представляющее изучение формы кривой по уравнению. Затем следует упрощение уравнения, введением к которому служит изучение центральных и диаметральных свойств кривых второго порядка. Конечно, только последнее приводит к заключению, что под понятие кривой второго порядка подводятся лишь парабола, эллипс и гипербола и их известные вырождения.

Уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{27}$$

разрешается относительно y:

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\cdot\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} \tag{28}$$

и особо изучаются случаи:

$$M < 0, \quad M > 0 \text{ и } \quad M = 0.$$

Далее рассматриваются основные свойства кривой второго порядка. В преобразовании к осям и к центру мы теперь довольно близко следуем Брио и Букэ.

---

[24] Брио и Букэ. Кривые второго порядка.

Современные учебники ведут свое происхождение главным образом от большого руководства Сальмона [25], который сам находится под влиянием курса Брио и Букэ и других родственных учебников.

Без сомнения, большое значение в развитии аналитической геометрии имело понятие предела, данное Даламбером, и понятие о единственности на прямой бесконечно удаленной точки, принадлежащее Понсэ.

[25] Д. Сальмон. Аналитическая геометрия. М., изд. Гербек, 1892.